3次元多様体上のNon-Singular Morse-Smale Flowはいつ横断的葉層構造をもつか? (力学系の理論とその応用)

矢野, 公一

数理解析研究所講究録
443巻 1981年 208-222

3次元多様体上の non-singular Morse-Smale flow はいつ横断的葉層構造をもつか?

東大 理 矢野 公一

Tamura-Sato [9] は次の問題を提起した。

問 与えられた葉層構造に対して，これが横断的葉層構造をもつかどうか決定せよ。

3次元多様体の余次元1葉層構造に対する横断的余次元1葉層構造の存在に関しては，Tamura-Sato [9] 他，Nishimori [6], [7] 等の結果がある。一方，曲面上の S^1 bundle を1次元葉層構造と見たとき，これに横断的葉層構造が存在するか，即ち与えられた bundle が flat な接続をもつかどうかは bundle の Euler 類で完全に決定されることが知られている。（Milnor [4], Wood [11]） この結果は更に，Eisenbud-Hirsch-Neuman [2] によって Seifert fibring の場合に，また Sullivan, Smillie, Gromov 等によって高次元の場合に（Gromov [3]）それぞれ拡張されている。

本稿では，力学系的には最も簡明であると思われる non-singular Morse-Smale flow に対して，3次元の場合，それが横断的葉層構造をもつ為の条件を求める。手法は Asimov [1]，Morgan [5] による round handle decomposition 及び Novikov [8] による vanishing cycle の議論である。

§1. Non-singular Morse-Smale flow と round handle decomposition

以下，多様体はすべて3次元で向きづけ可能とする。

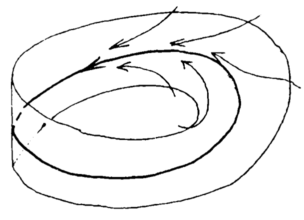
定義（詳しくは Asimov [1] 参照）　M を閉多様体，X を C^∞ vector field，$\varphi=\{\varphi_t\}$ を X が生成する flow とする。φ が non-singular Morse-Smale flow（以下 NMS と略）であるとは以下の条件が満たされるときをいう。

(i) $X(x)\neq 0$ for $^\forall x\in X$。

(ii) φ の non-wandering set は有限個の閉軌道の和であって，かつすべての閉軌道は双曲型。

(iii) 任意の閉軌道 γ, γ' に対して $W^s(\gamma) \pitchfork W^u(\gamma')$。但し，$W^s, W^u$ は各々，安定，不安定多様体。

注1）"ねじれ"をもつ双曲的閉軌道が存在し得るが，以下は簡単の為，これは考えないこととする。即ち，NMSとして各閉軌道の安定，不安定多様体が向きづけ可能のもののみを扱う。



注2）閉軌道 γ, γ' に対して $W^s(\gamma) \cap W^u(\gamma') \neq \phi$ のとき $\gamma \leqq \gamma'$ と定義すると，条件(ii)，(iii)よりこれは partial ordering となる。以下の議論に於ては(iii)のかわりにこの条件（no cycle condition）で充分である。

NMSの存在問題に関連して Asimov [1] は round handle decomposition の概念を導入した。以下を round handle と呼ぶ。

$(S^1 \times D^2, \phi)$ round 0-handle

$(S^1 \times D^1 \times D^1, S^1 \times \partial D^1 \times D^1)$ round 1-handle

$(S^1 \times D^2, S^1 \times \partial D^2)$ round 2-handle

M が N に round handle (R, R') を attach して得られる多様体であるとは，embedding $f: R' \to \partial N$ が存在して $M = N \cup_f R$ となるときをいう。

定義 多様体 M の round handle decomposition（以下，RHD と略）とは filtration

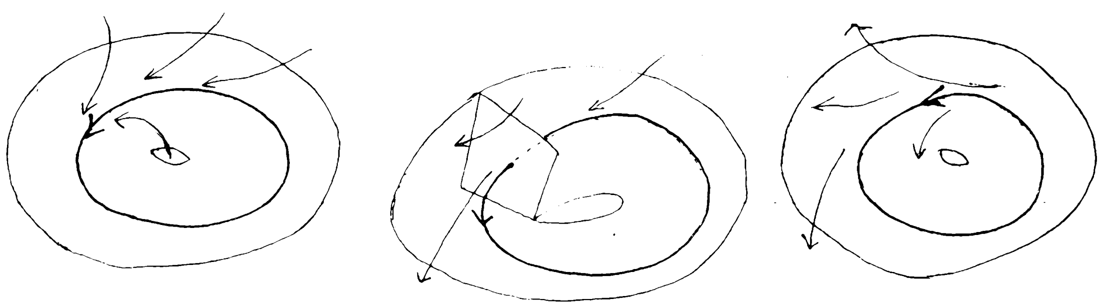
$$\phi = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$$

であって，各 M_{j+1} が M_j に round handle を attach して得られた多様体であるものをいう。

注3） RHD の handle の attaching の順序は次元の低いものからであるとしてよい。

定理（Asimov [1], Morgan [5]） NMS と RHD とは自然に対応する。

証明の概略） RHD が与えられたとき，各 round handle (R, R') の内部に双曲的閉軌道を1つだけもち，かつ $\partial R \supset R'$ で vector が outward である様な vector field を構成すれば，



round 0-handle　　round 1-handle　　round 2-handle

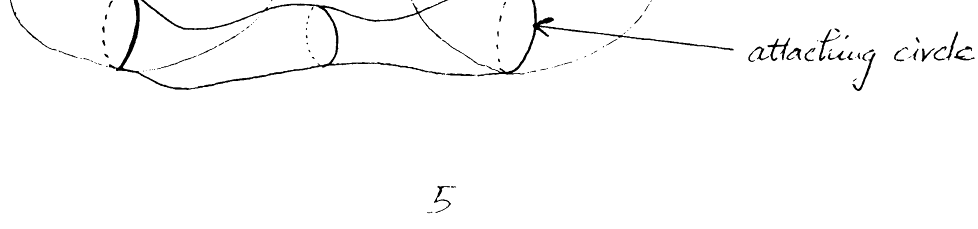
これは total space の NMS を与える。逆に NMS に対して，上記の様に閉軌道に round handle が対応する RHD が存在する。□

§2. Round 1-handle の attaching

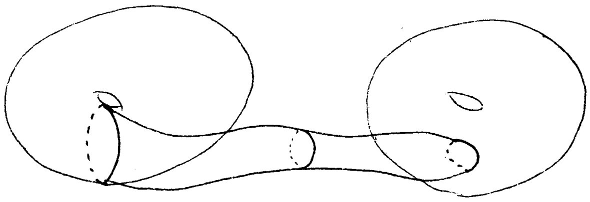
§1 の定理によって NMS の構造と RHD の構造が対応しており，また後者は各々の round handle の attaching に帰着されるが，鍵となるのは round 1-handle である。今，多様体 N に round 1-handle $(S^1\times D^1\times D^1,\ S^1\times\partial D^1\times D^1)$ が写像 $f: S^1\times\partial D^1\times D^1 \to \partial N$ で attach されているとき，f による $S^1\times\partial D^1\times\{0\}$ の各連結成分の image を attaching circle と呼ぶ。

境界が T^2 の和である多様体への round 1-handle の attaching は次の 11 種類に分類される。(1)〜(4) は 2 つの連結成分へまたがる attaching，(5)〜(11) は 1 つの連結成分への attaching。

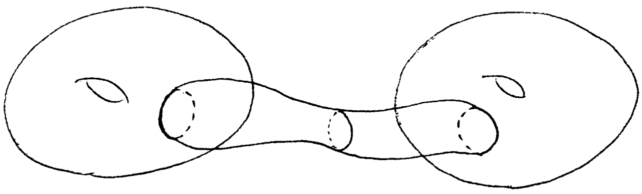
(1)



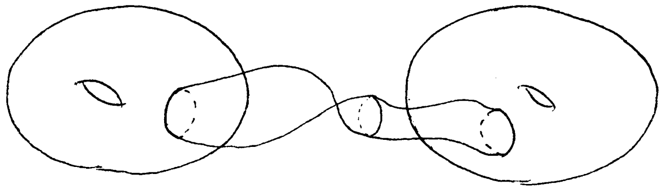
(2)



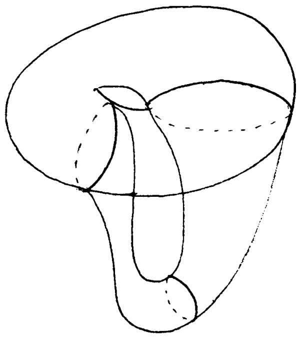
(3)



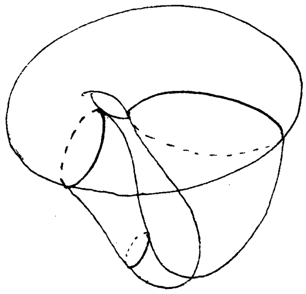
(4)



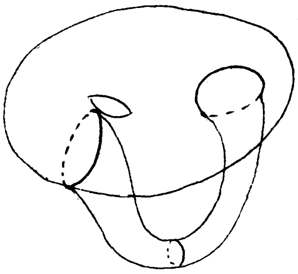
(5)



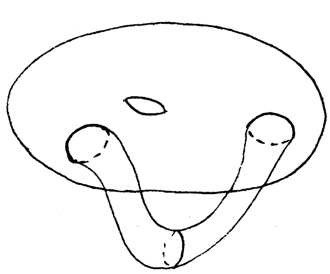
(6)



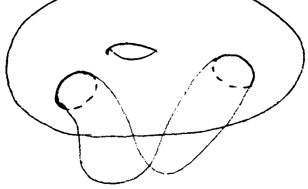
(7)



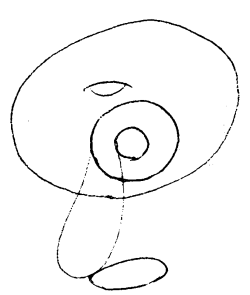
(8)



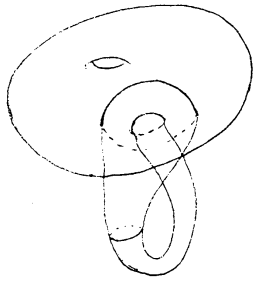
(9)



(10)



(11)



例えば(1)の方法でattachされたround 1-handleをType(1)などと呼ぶ。

<u>補助定理</u>　Nを境界がT^2の和である多様体とする。Nにround 1-handleを(3),(8)以外の方法でattachすれば、新しく出現する境界はやはりT^2である。

Round 0-handleのattachingは$S^1\times D^2$とのdisjoint union, round 2-handleのattachingはT^2境界を$S^1\times D^2$で"埋める"ことである。従ってこの補助定理により、例えば、与えられたRHDのround 1-handleがtype(1),(2)のもののみである等の表現が許される。

§3. 結果

定理1. NMS に対して，対応するRHD の round 1-handle の attaching circle が境界上で homotopic to zero でない，即ち round 1-handle が type (1), (5), (6) のもののみであれば，この NMS は C^1 級*)の横断的葉層構造をもつ。

定理1′. NMS に対して，対応する RHD の round 1-handle が type (1), (5) のもののみであれば，この NMS は C^∞ 級の横断的葉層構造をもつ。

定理2. NMS が C^2 級の横断的葉層構造をもてば，対応する RHD の round 1-handle は type (1), (5), (6) のものに限る。

系1 NMS 及びそれに横断的な C^2 級葉層構造をもつ3次元閉多様体は graph 多様体である。即ち，有限個の embedded torus で切断すれば，(punctured surface) $\times S^1$ の有限和となる。

---

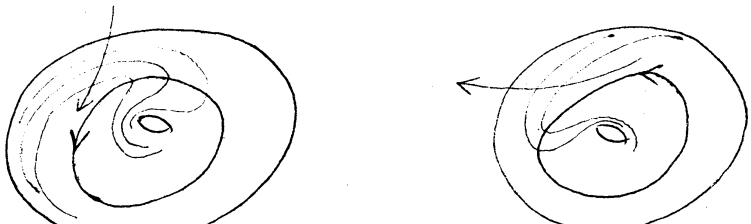
*) C^1 級になることは土屋氏の Observation。

また Wood [10] の "possible conjecture" に対して次の否定的解答を得る。

<u>系2</u>　M を3次元 C^∞ 級閉多様体，$\mathfrak{X}^1(M)$ を M 上の C^1 級 vector field 全体のなす空間とする。このとき開集合 $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ であって，$\mathcal{U}$ の各元が横断的葉層構造を持たぬものが存在する。

§4. 横断的葉層構造の構成

定理1′の証明の概略を述べる。今，多様体 M 上の NMS 及び対応する RHD $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ が定理1′の条件を満たしているとする。各 round-handle ごとに横断的葉層構造を構成してゆけばよい。まず，round 0-handle, 2-handle には Reeb component をはめ込む。（Reeb component については Novikov [8] を見よ。）

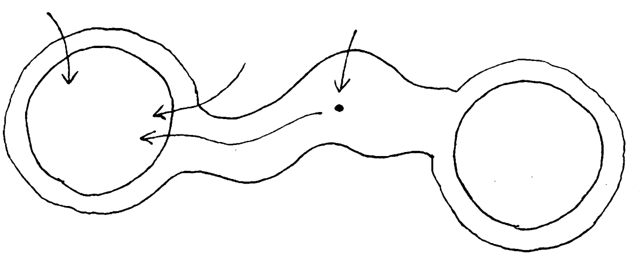


round 0-handle　　　round 2-handle

Round 1-handle (R, R') に対しては Morgan [5] に従って <u>fatten handle</u> $C(R)$ を考える。 これは round 1-handle に attach される側の境界の collar を付け加え、水増ししたものである。 即ち、

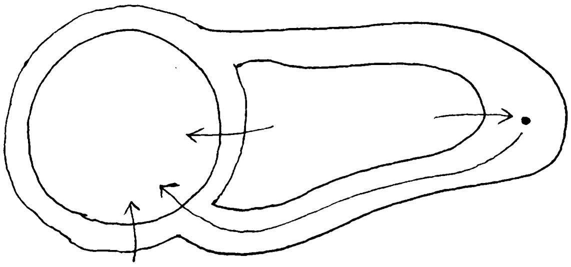
(R, R') が type (1) のとき

$$C(R) = (T^2 \times [0,1] \cup T^2 \times [0,1]) \cup_f R$$

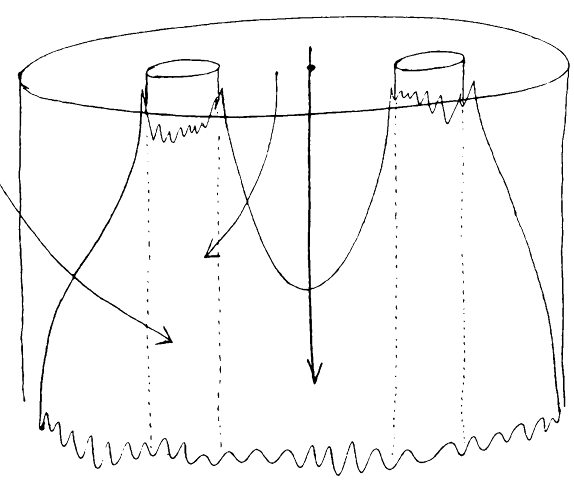


(R, R') が type (5) のとき

$$C(R) = T^2 \times [0,1] \cup_f R \text{。}$$



この fatten handle の内部の flow は上図の様になっているから、(two punctured disk)$\times S'$ の bundle foliation を境界のところで流せば flow に横断的となる。 これらを貼りあわせて total space M での横断的葉層構造を得る。



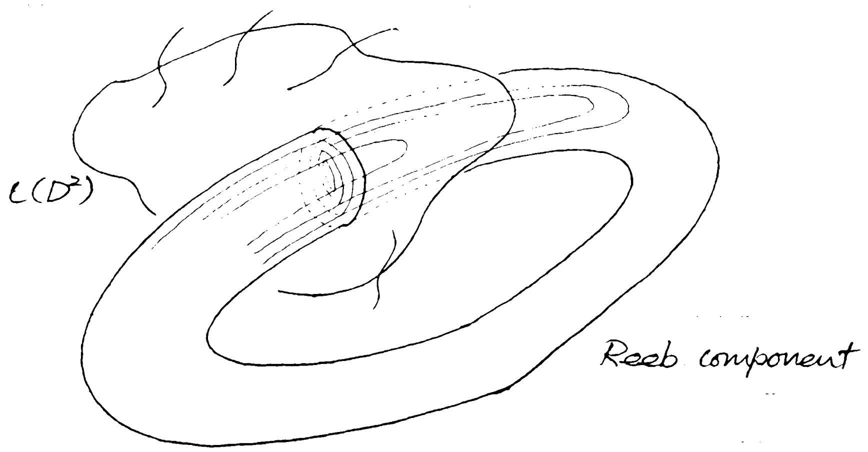
type (1)

§5. 横断的葉層構造の非存在

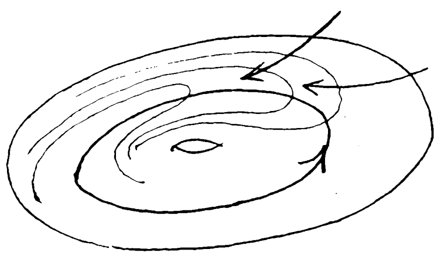
Novikov [8] による vanishing cycle の議論を次の型で引用する。

<u>定理 (Novikov [8])</u>　$\mathcal{F}$ を 3 次元多様体 M の C^2 級葉層構造とする。埋め込み $\iota: D^2 \to M$ で $\iota|\partial D^2$ が $\mathcal{F}$ に横断的であるものが存在すれば、$\mathcal{F}$ の Reeb component で $\iota(D^2)$ と交わるものが存在する。

これを用いて定理2 を証明するが、その為には次の補助定理も必要である。



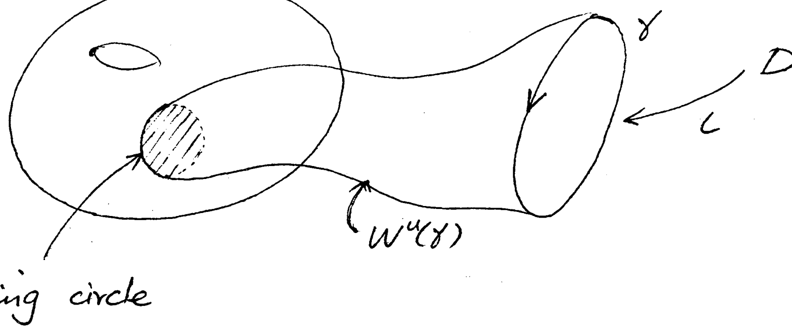
<u>補助定理</u>　$(S^1\times D^2, \mathcal{F}_R)$ を Reeb component とする。このとき $S^1\times D^2$ の vector field で $\mathcal{F}_R$ に横断的なものは、$S^1\times D^2$ の内部に閉軌道をもつ。



証明は Brouwer の固定点定理による。

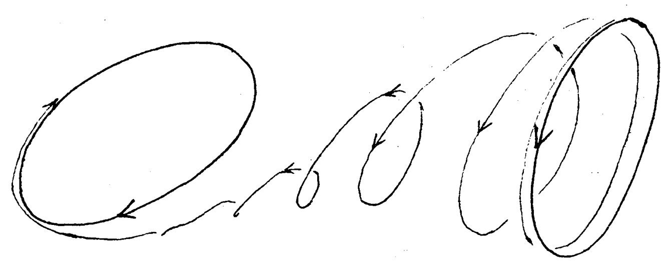
定理2の証明）背理法による。多様体 M 上の NMS が C^2 級の横断的葉層構造をもち、かつ対応する RHD の round 1-handle には type (1), (5), (6) 以外のものが存在すると仮定する。このとき attaching circle で境界上 homotopic to zero なるものが存在するから、Novikov の定理の仮定を

満たす埋め込み $\iota: D^2 \to M$ が次の様に構成できる。



Novikovの定理によって $\iota(D^2)$ と交わる Reeb component が存在し，またもとの vector field は葉層構造に横断的だから，補助定理によって $\iota(D^2)$ と交わる閉軌道が存在しなければならないが，これは ι の構成と矛盾する。 よって定理スが証明された。 □

系スの証明） 定理スの証明は local なものであったから，任意の多様体に，例えば次の様な vector field を埋め込めば，これは横断的葉層構造をもたない。



一方，このような vector field は C^1 級の摂動に関して安定だから求める結果を得る。 □

定理 1，系 1 の証明は略す。

文献

[1] D. Asimov : Round handles and non-singular Morse-Smale flows, Ann. Math., 102 (1975) 41-54.

[2] D. Eisenbud - U. Hirsch - W. Neumann : Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphisms of the circle, to appear.

[3] M. Gromov : Volume and bounded cohomology, to appear in IHES Publ. Math.

[4] J. Milnor : On the existence of a connection with curvature zero, Comm. Math. Helv., 32 (1958) 215-233.

[5] J. Morgan : Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds, Topology, 18 (1979) 41-53.

[6] T. Nishimori : Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds, to appear.

[7] T. Nishimori : Foliations transverse to the turbulized foliations of punctured torus bundles over a circle, to appear.

[8] A. Novikov : Topology of foliations, AMS transl., (1967) 286–304.

[9] I. Tamura – A. Sato : On transverse foliations, to appear in IHES Publ. Math.

[10] J. Wood : Foliations on 3-manifolds, Ann. Math., 89 (1969) 336–358.

[11] J. Wood : Bundles with totally disconnected structure group, Comm. Math. Helv, 46 (1971) 257–279.